ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 251

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 273

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 150

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $z = x + yi$. Τότε έχουμε:

$$2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 2\mathrm{Re}(z)i - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x-2)i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

Β2. Είναι: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{2} = \dfrac{2i}{2} = i$

Άρα: $w = 3\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^{4\cdot 9+3} = 3 \cdot \left(i^4\right)^9 \cdot i^3 = 3 \cdot 1 \cdot (-i) = -3i$

Β3. Επειδή $w = -3i$, $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$ η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4(1+i) - (1-i) - i| \Leftrightarrow |u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |u - 3i| = |3 + 4i| \Leftrightarrow |u - 3i| = \sqrt{9+16} \Leftrightarrow |u - 3i| = \sqrt{25} \Leftrightarrow |u - (0 + 3i)| = 5$$

Δηλαδή ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο το Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 5$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η h είναι συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$h'(x) = 1 - \frac{\left(e^x + 1\right)'}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} \text{ και}$$

$$h''(x) = -\frac{\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2} = -\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ2. Επειδή η $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επίσης είναι: $h(1) = 1 - \ln\left(e^x+1\right) = \ln e - \ln\left(e^x+1\right) = \ln\frac{e^x+1}{e}$

Η ανίσωση γίνεται: $e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < h(1) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow} x < 0$

Γ3. Για την οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$ έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln\left(e^x+1\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} \underset{\text{De'L Hospital}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=\!=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$, οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \ln 1 = 0$ και συνεπώς η ευθεία $y = 0$ (άξονας x΄x) είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Για την πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x - \ln\left(e^x+1\right)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1 - \ln\left(e^x+1\right)\frac{1}{x}\right) = 1 - 0\cdot 0 = 1$$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$

$$\beta = \lim_{x\to-\infty}\left(h(x) - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \ln\left(e^x+1\right) - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right) = 0$$

και συνεπώς η ευθεία $y = x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Είναι $\varphi(x) = e^x\left(x - \ln\left(e^x+1\right) + \ln 2\right) = e^x\left(\ln e^x - \ln\left(e^x+1\right) + \ln 2\right) = e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

- $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2e^x}{e^x+1} = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1} = 1 \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow e^x\ln\frac{2e^x}{e^x+1} > 0 \Leftrightarrow \ln\frac{2e^x}{e^x+1} > \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x+1} > 1 \Leftrightarrow 2e^x > e^x + 1 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

Η φ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων με $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Άρα: $E(\Omega)=\int_0^1 \varphi(x)dx=\int_0^1 e^x \ln\dfrac{2e^x}{e^x+1}dx$

Θέτουμε $u=e^x$, οπότε $du=e^x dx$ και για $x=0\Rightarrow u=1$, για $x=1\Rightarrow u=e$

$$E(\Omega)=\int_1^e \ln\frac{2u}{u+1}du=\int_1^e u'\cdot\ln\frac{2u}{u+1}du=\left[u\cdot\ln\frac{2u}{u+1}\right]_1^e-\int_1^e u\frac{1}{\frac{2u}{u+1}}\left(\frac{2u}{u+1}\right)'du=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-1\cdot\ln1-\int_1^e u\frac{u+1}{2u}\cdot\frac{2(u+1)-2u}{(u+1)^2}du=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-0-\int_1^e \frac{u+1}{2}\cdot\frac{2u+2-2u}{(u+1)^2}du=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^e\frac{u+1}{2}\cdot\frac{2}{(u+1)^2}du=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\int_1^e\frac{1}{u+1}du=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\left[\ln(u+1)\right]_1^e=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\left[\ln(e+1)-\ln2\right]=$$

$$=e\cdot\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\frac{e+1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\ \underset{\text{De'L Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}}\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1=f(0)$

Συνεπώς επειδή $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x\neq0$ έχουμε: $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-(e^x-1)}{x^2}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=xe^x-e^x+1$, $x\in\mathbb{R}$

Είναι: $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow xe^x=0\Leftrightarrow x=0$, $g'(x)>0\Leftrightarrow xe^x>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	↘ 0 min ↗

Η g έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, άρα:

$g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq0$ και συνεπώς $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}>0$ για κάθε $x\neq0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2. α) Έστω η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x f(u)du$, $x\in\mathbb{R}$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Για $x>0$ είναι: $e^x-1>0$ οπότε: $f(x)>0$

για $x<0$ είναι: $e^x-1<0$ οπότε: $f(x)>0$

και αφού $f(0)=1>0$ ισχύει: $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $h'(x)=f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και "1-1".

Επειδή η f είναι κυρτή άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς "1-1".

Επίσης έχουμε: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\underset{\text{De'L Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1-x\right)'}{\left(x^2\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}\underset{\text{De'L Hospital}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $\int_1^{2f'(x)}f(u)du=0\Leftrightarrow h\left(2f'(x)\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h\left(2f'(x)\right)=h(1)\overset{h:\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\overset{f':\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}x=0$

β) Στο σημείο στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης y(t) ισχύει:

$x'(t)=2y'(t)\Leftrightarrow x'(t)=2\left[f\left(x(t)\right)\right]'\Leftrightarrow x'(t)=2f'\left(x(t)\right)x'(t)\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow}f'\left(x(t)\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f'\left(x(t)\right)=f'(0)\overset{f':\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}x(t)=0$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M\left(0,f(0)\right)=M(0,1)$

Δ3. Η συνάρτηση g για $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, $x>0$ γράφεται:

$$g(x)=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2 2(x-2)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=$$
$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-2e^x+e^x-e\right)=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$$

- $e^x-e=0\Leftrightarrow e^x=e\Leftrightarrow x=1$, $e^x-e>0\Leftrightarrow x>1$, $e^x-e<0\Leftrightarrow x<1$
- $x-2=0\Leftrightarrow x=2$, $x-2>0\Leftrightarrow x>2$, $x-2<0\Leftrightarrow x<2$
- Έστω η συνάρτηση $h(x)=xe^x-e^x-e$, $x>0$.

  Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

  Επίσης $h(1)=-e<0$ και $h(2)=e^2-e=e(e-1)>0$. Η h είναι συνεχής στο [1,2] και επειδή $h(1)\cdot h(2)<0$ από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$.

Επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο (1,2). Έτσι για $x > x_0 \Rightarrow h(x) > h(x_0) \Rightarrow h(x) > 0$ και για $x < x_0 \Rightarrow h(x) < h(x_0) \Rightarrow h(x) < 0$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

οπότε η μονοτονία της g είναι:

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$	τ.ε.	$\nearrow$	

Τελικά η g έχει τοπικά ελάχιστα στα σημεία $x = 1$ και $x = 2$ και τοπικό μέγιστο στο σημείο $x = x_0$.