ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 335

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 246

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 222

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θέτω $|z-2|=\omega$ με $\omega \geq 0$. Άρα $\omega^2+\omega-2=0 \Leftrightarrow (\Delta=9)\ \omega_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \omega_1=-2$ (απορρίπτεται) ή $\omega_2=1 \Leftrightarrow |z-2|=1$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Για κάθε z με εικόνα στον παραπάνω κύκλο ισχύει:

$|z|=|z-2+2| \overset{\text{τριγ. ανισ.}}{\leq} |z-2|+2=1+2=3$, άρα $|z|\leq 3$

Β2. Αφού z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, θα ισχύει $z_2=\bar{z}_1$. Έστω $z_1=x+yi$. Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(\bar{z}_1)|=2 \Leftrightarrow 2|\operatorname{Im}(z_1)|=2 \Leftrightarrow y=\pm 1$ (1)

Επίσης από τους τύπους Vieta έχουμε:

- $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow z_1+\bar{z}_1=-\beta \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(z_1)=-\beta \Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{2}$ (2)
- $z_1\cdot z_2=\gamma \Leftrightarrow z_1\cdot\bar{z}_1=\gamma \Leftrightarrow |z_1|^2=\gamma \Leftrightarrow x^2+y^2=\gamma$ (3)

Ισχύει $|z_1-2|=1 \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \left|-\dfrac{\beta}{2}\pm i-2\right|=1 \Leftrightarrow \left|-\dfrac{\beta}{2}-2\pm i\right|=1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta}{2}+2\right)^2+1=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{\beta}{2}+2\right)^2=0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2}+2=0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2}=-2 \Leftrightarrow \beta=-4$ (4)

(3) $\Leftrightarrow \dfrac{\beta^2}{4}+1=\gamma \overset{(4)}{\Leftrightarrow} 4+1=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

Β3. Είναι $v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0 \Leftrightarrow -v^3=\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0$

Οπότε $\left|-v^3\right| = \left|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0\right| \overset{\text{τριγ. ανισ.}}{\Leftrightarrow} |v|^3 \le |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|$ (1)

Αφού α_0, α_1, α_2 ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1 ισχύουν: $|\alpha_0| \le 3$, $|\alpha_1| \le 3$, $|\alpha_2| \le 3$. Συνεπώς η (1) γίνεται:

$$|v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \le 0 < 1 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 < 0 \overset{\text{σχ. Horner}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left(|v| - 4\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow |v| - 4 < 0 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ διότι } |v|^2 + |v| + 1 > 0 \text{ αφού } \Delta<0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι: $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right) = x \Leftrightarrow 2\left(f(x)+x\right)\left(f(x)+x\right)' = 2x \Leftrightarrow \left[\left(f(x)+x\right)^2\right]' = \left(x^2\right)'$

Άρα από γνωστό θεώρημα έχουμε: $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ έχουμε: $\left(f(0)\right)^2 = 0 + c \Leftrightarrow 1 = c$, οπότε: $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2 + 1$ (1)

Επειδή $x^2 + 1 \ne 0$ είναι και $f(x) + x \ne 0$. Επειδή επιπλέον η $f(x) + x$ είναι συνεχής, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $f(0) + 0 = 1 > 0$, έχουμε $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η (1) γράφεται: $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

Γ2. Έχουμε: $f\left(g(x)\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = f(0)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

Αλλά για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $x \le |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$, άρα $x - \sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "1-1".

Οπότε: $f\left(g(x)\right) = f(0) \overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε $h'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

Κατασκευάζοντας τον πίνακα μονοτονίας της h έχουμε:

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$

$h(-1) = -1$, $h(0) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Έχουμε:

$\Delta_1 = (-\infty, -1)$, $\Delta_2 = [-1, 0]$ και $\Delta_3 = (0, +\infty)$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1 Τ.μ.	↘	-2 Τ.ε.	↗	$+\infty$

- Αν $x \in \Delta_1$ τότε $h\left(\Delta_1\right) = (-\infty, -1)$ και $0 \notin h\left(\Delta_1\right)$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν έχει λύση στο Δ_1
- Αν $x \in \Delta_2$ τότε $h\left(\Delta_2\right) = [-2, -1]$ και $0 \notin h\left(\Delta_2\right)$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν έχει λύση στο Δ_2

- Αν $x \in \Delta_3$ τότε $h(\Delta_3) = (-2, +\infty)$ και $0 \in h(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση στο Δ_3, αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3.

Τελικά η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει μία ακριβώς λύση που βρίσκεται στο $(0, +\infty)$.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $K(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο IR, η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR, οπότε και συνεχής. Άρα η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως σύνθεση συνεχών. Έχουμε:

- Η K(x) είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως άθροισμα συνεχών
- $K(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$ διότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in$ IR.

  $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t)dt - f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1 < 0$. Άρα: $K(0) \cdot K\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$

Συνεπώς εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano και υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - 1}{h}$ Έχουμε: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - 1 - f(1-h) + 1}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - 1}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h) - 1}{h} = 0$ (1)

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h) - 1}{h} \underset{h\to 0 \Rightarrow u\to 0}{\overset{\text{Θέτω } u=5h}{=\!=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - 1}{\frac{u}{5}} = 5\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - 1}{u} = 5f'(1)$
- $\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h) - 1}{h} \underset{h\to 0 \Rightarrow u\to 0}{\overset{\text{Θέτω } u=-h}{=\!=}} \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - 1}{-u} = -\lim_{u\to 0}\frac{f(1+u) - 1}{u} = -f'(1)$

Από την (1) έχουμε: $5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow 5f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

- Για $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- Για $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

Όπως φαίνεται και στο διπλανό πίνακα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	min	↗	

Δ2. Επειδή η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\alpha>1$, η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$

Για $x>1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>1 \Leftrightarrow f(x)-1>0$, οπότε $g'(x)>0$ και συνεπώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+1} g(u)du$, $x>1$

Είναι $h'(x)=g(x+1)-g(x)>0$, αφού $x+1>x \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x+1)>g(x)$

Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα. Για $x>1$ έχουμε:

• $h\left(8x^2+5\right)=\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du$ με $8x^2+5>1$ • $h\left(2x^4+5\right)=\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$ με $2x^4+5>1$

Η δοσμένη ανίσωση γράφεται: $h\left(8x^2+5\right)>h\left(2x^4+5\right) \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} 8x^2+5>2x^4+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^4-8x^2<0 \Leftrightarrow 2x^2\left(x^2-4\right)<0 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,2)$

Δ3. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$ (1)

Η f είναι συνεχής στο $[1,x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,x)$ επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow f'(\xi)(x-1)=f(x)-1$

Επομένως: $(1) \Leftrightarrow g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2} \Leftrightarrow g''(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$

Για $\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi)<f'(x) \Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$, άρα $g''(x)>0$, οπότε η g είναι κυρτή.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$(\alpha-1)g(x)=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha) \overset{\alpha>1}{\Leftrightarrow} g(x)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο $x=\alpha$ είναι:

$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha) \overset{g(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} y=g'(\alpha)(x-\alpha)$

Αφού η g είναι κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται σε κάθε σημείο της πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $g(x)\geq g'(\alpha)(x-\alpha)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\alpha$.

Άρα η εξίσωση $g(x)=g'(\alpha)(x-\alpha)$ έχει μοναδική λύση την $x=\alpha$.