ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 28

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 148

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 876

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1^2}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{(x^3+x^2)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\frac{-1}{(-1)^2\left(\sqrt{1-1+1}+1\right)} = \frac{1}{4}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων, με: $f\,'(x) = \frac{1}{3}\ln x + \frac{x}{3}\frac{1}{x} = \frac{\ln x+1}{3}$, $x>0$. Άρα: $P(\omega_3) = f\,'(1) = \frac{1}{3}$

Β2. Είναι: $A' = \{\omega_2,\omega_3\}$, επομένως: $P(A') = P(\omega_2)+P(\omega_3) \geq P(\omega_3) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A') \geq \frac{1}{3}$

Είναι: $\{\omega_1\} \subseteq A$, οπότε $P(\omega_1) \leq P(A) \Leftrightarrow P(\omega_1) \leq 1-P(A') \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1-P(A') \Leftrightarrow P(A') \leq \frac{3}{4}$

Τελικά έχουμε: $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$

Β3. Είναι: $P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4}-\frac{1}{3} \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$

Επίσης: $P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}+P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{12}+\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow \frac{12}{12}+P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$

Είναι: $A-B=\{\omega_4\}=\varnothing$, $B-A=\{\omega_3\}$, οπότε $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

Είναι: $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ και $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$, οπότε: $A'-B'=\{\omega_3\}$ και

$P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι κλάσεις είναι διαστήματα της μορφής [50,50+c) , [50+c,50+2c), [50+2c,50+3c), [50+3c,50+4c) και επειδή η κεντρική τιμή της 4ης κλάσης είναι 85 έχουμε:

$$\frac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow 100+7c=170\Leftrightarrow 7c=70\Leftrightarrow c=10$$

Γ2. Είναι: $f_4=2f_3$ (1)

Αφού η διάμεσος είναι $\delta=75$ έχουμε: $f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=50\%\Leftrightarrow f_1+f_2+\frac{f_3}{2}=0,5$ (2)

Επίσης: $\bar{x}=74\Leftrightarrow 55f_1+65f_2+75f_3+85f_4=74$ (3)

Τέλος ισχύει: $f_1+f_2+f_3+f_4=1$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των (1),(2),(3),(4) έχουμε:

Η (2) γράφεται: $2f_1+2f_2+f_3=1\Leftrightarrow f_3=1-2f_1-2f_2$ (5)

Η (1) λόγω της (5) γίνεται: $f_4=2f_3\Leftrightarrow f_4=2-4f_1-4f_2$ (6)

Η (4) λόγω των (5) και (6) γίνεται: $f_1+f_2+1-2f_1-2f_2+2-4f_1-4f_2=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5f_1-5f_2=-2\Leftrightarrow f_2=\frac{2}{5}-f_1$ (7)

Η (3) λόγω των (5),(6),(7) γίνεται:

$$55f_1+65\left(\frac{2}{5}-f_1\right)+75\left(1-2f_1-2f_2\right)+85\left(2-4f_1-4f_2\right)=74\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 55f_1+26-65f_1+75-150f_1-150f_2+170-340f_1-340f_2=74\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -500f_1-490f_2=-197\overset{(7)}{\Leftrightarrow}-500f_1-490\left(\frac{2}{5}-f_1\right)=-197\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -500f_1-196+490f_1=-197\Leftrightarrow -10f_1=-1\Leftrightarrow f_1=0,1$$

Η (7) λοιπόν γίνεται: $f_2=\frac{2}{5}-\frac{1}{10}\Leftrightarrow f_2=\frac{3}{10}\Leftrightarrow f_2=0,3$

Η (5) γίνεται: $f_3=1-2\cdot 0,1-2\cdot 0,3=1-0,2-0,6\Leftrightarrow f_3=0,2$

Και τέλος από την (1) έχουμε: $f_4=2\cdot 0,2\Leftrightarrow f_4=0,4$

Οπότε ο πίνακας είναι:

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[50, 60)	55	0,1
[60, 70)	65	0,3
[70, 80)	75	0,2
[80, 90)	85	0,4
Σύνολο		1

Γ3. Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 έχουν διαφορετική βαρύτητα, οπότε:

$$\overline{x}_1 = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,1 + 0,2 + 0,3} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Αφού η κατανομή είναι κανονική και το 2,5% των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\overline{x} + 2s = 74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι $\overline{x} - s = 68$, όπου $\overline{x}, s$ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των κ παρατηρήσεων, αντίστοιχα. Άρα:

$$\begin{cases} \overline{x} + 2s = 74 \\ \overline{x} - s = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 68 + s + 2s = 74 \\ \overline{x} = 68 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3s = 6 \\ \overline{x} = 68 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2 \\ \overline{x} = 70 \end{cases}$$

Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2}{70} < \frac{1}{10}$ και συνεπώς το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $f'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$.

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο (1,f(1)).

Επειδή $\lambda = f'(1) = 1$ η εξίσωση γίνεται: $y = x + \beta$.

Η εφαπτομένη όμως διέρχεται από το σημείο Α(1,κ), οπότε: $\kappa = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = \kappa - 1$

Συνεπώς η εφαπτομένη είναι η $y = x + \kappa - 1$

Αν Α, Β είναι τα σημεία που τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα τότε έχουμε: Α(1–κ,0) και Β(0,κ–1)

Το τρίγωνο ΟΑΒ έχει εμβαδόν $E = \frac{1}{2}|1-\kappa| \cdot |\kappa - 1| = \frac{1}{2}|\kappa - 1|^2 = \frac{|\kappa - 1|^2}{2}$

Ισχύει όμως $E < 2 \Leftrightarrow \frac{|\kappa - 1|^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow |\kappa - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$ και επειδή ο κ είναι ακέραιος με κ>1 άρα $\kappa = 2$

Δ2. α) Αν y_i είναι οι τεταγμένες των x_i, $i = 1,2,...,50$ τότε $y_i = x_i + \kappa - 1 \overset{\kappa=2}{\Leftrightarrow} y_i = x_i + 1$, οπότε $\overline{y} = \overline{x} + 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 31 - 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 30$

β) Είναι $\frac{(x_1 + 3) + ... + (x_{20} + 3) + x_{21} + ... + x_{35} + (x_{36} - \lambda) + ... + (x_{50} - \lambda)}{50} = 31 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i + 20\cdot 3 - 15\lambda}{50} = 31 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 1550 \Leftrightarrow 50\bar{x} + 60 - 15\lambda = 1550 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 50\cdot 30 - 15\lambda = 1490 \Leftrightarrow -15\lambda = -10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$

Δ3. Είναι $f(x) = x\ln x + 2,\ x > 0$, οπότε: $f\,'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$

$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ και

$f\,'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Έχουμε λοιπόν τον διπλανό πίνακα:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - \frac{1}{e} > 0$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ έχουμε:

$$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Επειδή $f\,'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ προκύπτει ότι: $f\,'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$

Συνεπώς το εύρος είναι: $R = f(e) - f\,'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$

Η δοσμένη σχέση γράφεται: $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = e^7 \Leftrightarrow \ln\left(\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma\right) = \ln e^7 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln\alpha^\alpha + \ln\beta^\beta + \ln\gamma^\gamma = 7\ln e \Leftrightarrow \alpha\ln\alpha + \beta\ln\beta + \gamma\ln\gamma = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha) - 2 + f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 2 = 7 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13$$

Έτσι: $\bar{x} = \dfrac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f\,'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} = \dfrac{13 + e + 2 + 0}{5} = \dfrac{15 + e}{5}$

Δ2. **α)** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t,f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία, επομένως: $f\,'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow t > \frac{1}{e}$

Άρα: $A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$. Συνεπώς $N(A) = 20$ και $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε: $f(t) > f\,'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t + 2 > \ln t + 1 + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$

Επειδή $t \in \Omega$ έχουμε $0 < t \le 1$, αλλά από την παραπάνω σχέση πρέπει $t \ne 1$.

Τελικά $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$ και $A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$, άρα $P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$