ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα - Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

Α2. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

Α3. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 258

Α4. **α)** Σωστό　　**β)** Σωστό　　**γ)** Λάθος　　**δ)** Λάθος　　**ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4 \Leftrightarrow 2z\bar{z}=2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$

επομένως οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου Κ(0, 0) και ακτίνας ρ=1.

Β2. Αφού z_1, z_2 ανήκουν στον παραπάνω κύκλο ισχύει: $|z_1|=|z_2|=1$ (1)

Επίσης ισχύει: $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=2 \Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1+|z_2|^2=2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1=0$ (2)

Έχουμε: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=$

$=|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+|z_2|^2 \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} 2$, οπότε τελικά $|z_1+z_2|^2=2 \Leftrightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β3. Έστω $w=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε: $|w-5\bar{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow$

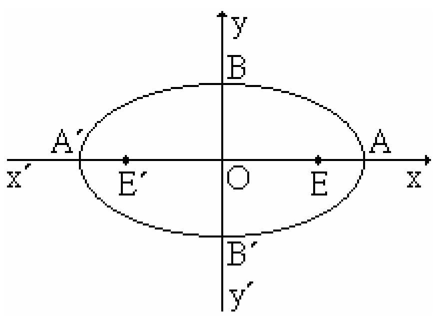
$\Leftrightarrow |-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow \sqrt{16x^2+36y^2}=12 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η παραπάνω έλλειψη. Οι εστίες της έλλειψης είναι στον άξονα x΄x (διότι 9>4) και έχει $\alpha=3$ και $\beta=2$.

Οι κορυφές της έλλειψης λοιπόν είναι:

Α΄(–3,0) και Α(3,0) και Β΄(–2,0) και Β(2,0)

Το $|w|$ είναι η απόσταση του μιγαδικού w από την αρχή των αξόνων, άρα $|w|_{max}=3$ και $|w|_{min}=2$.



Β4. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε: $\left||z|-|w|\right| \le |z-w| \le |z|+|w| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left||z|-|w|_{min}\right| \le \left||z|-|w|\right| \le |z-w| \le |z|+|w| \le |z|+|w|_{max}$

Επειδή $|z|=1$ και $|w|_{min}=2$ και $|w|_{max}=3$ η ανισότητα γίνεται:

$|1-2| \le \left||z|-|w|\right| \le |z-w| \le |z|+|w| \le 1+3$, δηλαδή $1 \le |z-w| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)=(x-1)\ln x-1$ είναι παραγωγίσιμη για $x>0$ με $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

- αν $x<1$ τότε $\ln x<0$ και $\dfrac{x-1}{x}<0$, οπότε : $f'(x)<0$ και συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$.

  Άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι: $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

- αν $x>1$ τότε $\ln x>0$ και $\dfrac{x-1}{x}>0$, οπότε : $f'(x)>0$ και συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$

  Άρα το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι: $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-1,+\infty)$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

Γ2. $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow \ln x^{x-1}=\ln e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x=2013 \Leftrightarrow f(x)+1=2013 \Leftrightarrow f(x)=2012$

- $2012\in f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_1\in\Delta_1$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1. Επίσης $x_1>0$.
- $2012\in f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_2\in\Delta_2$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική διότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2. Επίσης $x_2>0$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)e^x-2012e^x$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) και $h(x_1)=h(x_2)=0$ (από ερώτημα Γ2), οπότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0}+f(x_0)e^{x_0}-2012e^{x_0}=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4. Είναι: $g(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ και για κάθε $x\in[1,e]$ είναι $g(x)\ge0$.

Επομένως: $E=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e(x-1)\ln x dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=$$

$$=\frac{e^2}{2}-e-\left(\frac{e^2}{4}-e\right)+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}=\frac{e^2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω η συνάρτηση $G(x)=\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}$, $x\in(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, $1\in(0,+\infty)$ και x^2-x+1 είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $G'(x)=f\left(x^2-x+1\right)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}$

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε: $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0\Leftrightarrow G(x)\geq G(1)$, $x\in(0,+\infty)$.

Συνεπώς η G έχει ελάχιστο για $x=1$ το $G(1)=0$ και επειδή η G είναι παραγωγίσιμη για $x=1$ από θεώρημα Fermat ισχύει: $G'(1)=0\Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{e}=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ και επειδή $f(1)=-\frac{1}{e}<0$, είναι $f(x)<0$, $x\in(0,+\infty)$.

Οπότε $|f(x)|=-f(x)$ και η δοσμένη σχέση γράφεται: $\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot f(x)$

Έστω $h(x)=\ln x-x$, $x\in(0,+\infty)$.

Είναι $h'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$.

x	0	1	+∞
h΄(x)	+	0	−
h(x)	↗	-1 max	↘

Όπως φαίνεται στο διπλανό πίνακα η h παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$, οπότε:

$h(x)\leq h(1)\Leftrightarrow \ln x-x\leq -1$ δηλαδή $\ln x-x<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Συνεπώς $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\neq 0$, οπότε : $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}$ (1)

Η $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, οπότε η $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ είναι παραγωγίσιμη και συνεπώς και η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Στην σχέση $\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ θέτουμε $u(x)=\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ και έχουμε:

$$u'(x)=u(x)+e\Leftrightarrow e^{-x}u'(x)-e^{-x}u(x)=e^{-x}\cdot e\Leftrightarrow\left(e^{-x}u(x)\right)'=e^{1-x}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left(e^{-x}u(x)\right)' = \left(-e^{1-x}\right)'$ Από γνωστό πόρισμα είναι: $e^{-x}u(x) = -e^{1-x} + c$

Για $x = 1$: $e^{-1}u(1) = -e^{0} + c \Leftrightarrow 0 = -1 + c \Leftrightarrow c = 1$ και συνεπώς $e^{-x}u(x) = -e^{1-x} + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x}e^{-x}u(x) = -e^{x}ee^{-x} + e^{x} \Leftrightarrow u(x) = -e + e^{x} \Leftrightarrow \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt = -e + e^{x}$$

Έτσι η (1) γίνεται: $f(x) = \dfrac{\ln x - x}{-e + e^{x} + e} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{\ln x - x}{e^{x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x}\left(\ln x - x\right)$, $x \in (0, +\infty)$.

Δ2. Είναι: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{-x}\left(\ln x - x\right)\right) = -\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x - x\right) = -\infty$

Τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)} = 0$. Θέτουμε: $h = \dfrac{1}{f(x)}$. Όταν $x \to 0^+$ τότε $h \to 0^-$, οπότε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim_{h\to 0^-}\left(\frac{1}{h^2}\eta\mu h - \frac{1}{h}\right) = \lim_{h\to 0^-}\frac{\eta\mu h - h}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{De l'Hospital}}{=}} \lim_{h\to 0^-}\frac{\left(\eta\mu h - h\right)'}{\left(h^2\right)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu h - 1}{2h} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{De l'Hospital}}{=}} \lim_{h\to 0^-}\frac{\left(\sigma\upsilon\nu h - 1\right)'}{\left(2h\right)'} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-\eta\mu h}{2} = 0$$

Δ3. Η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με:

$F'(x) = f(x) < 0$ (άρα F γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$) και

$$F''(x) = f'(x) = \left(\frac{\ln x - x}{e^{x}}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^{x} - \left(\ln x - x\right)e^{x}}{e^{2x}} = \frac{x - 1 - \ln x + \frac{1}{x}}{e^{x}}$$

Όμως $x - 1 - \ln x \geq 0$, οπότε $F''(x) > 0$ και συνεπώς F κυρτή στο $(0, +\infty)$.

Η F είναι συνεχής στα [x,2x] και [2x,3x], παραγωγίσιμη στα (x,2x) και (2x,3x) επομένως σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχουν $\xi_1 \in (x,2x)$ και $\xi_2 \in (2x,3x)$ τέτοια, ώστε:

$$F'\left(\xi_1\right) = f\left(\xi_1\right) = \frac{F(2x) - F(x)}{x} \text{ και } F'\left(\xi_2\right) = f\left(\xi_2\right) = \frac{F(3x) - F(2x)}{x}$$

Επειδή $x < \xi_1 < 2x < \xi_2 < 3x$ έχουμε: $\xi_1 < \xi_2 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(\xi_1\right) < f\left(\xi_2\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{F(2x) - F(x)}{x} < \frac{F(3x) - F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(2x) - F(x) < F(3x) - F(2x) \Leftrightarrow F(x) + F(3x) > 2F(2x)$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\Phi(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta)$

- Η Φ είναι συνεχής στο [β,2β] ως παραγωγίσιμη και
- $\Phi(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$ διότι $\beta < 3\beta \overset{F\searrow}{\Rightarrow} F(\beta) > F(3\beta)$
  $\Phi(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$ από το ερώτημα Δ3

Συνεπώς από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2F(\xi) - F(\beta) - F(3\beta) = 0 \Leftrightarrow F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

Επειδή $\Phi'(x) = 2F'(x) = 2f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ οπότε το ξ είναι μοναδικό.