

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

Μονάδες 4

A3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

γ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .

δ) $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1) \quad , \quad |w-5\bar{w}| = 12 \quad (2)$$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$

Μονάδες 6

B2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

B4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1 \leq |z - w| \leq 4$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln x - 1, x > 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}, x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x > 0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x - x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)} dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x)$, $x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(f(x))^2 \ln \frac{1}{f(x)} - f(x) \right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x - 1$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$, $x > 0$ όπου $\alpha > 0$, είναι κυρτή (μονάδες 2).

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $F(x) + F(3x) > 2F(2x)$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

Μονάδες 4