ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 148

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 96

Α4. **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το σημείο του άξονα των $F_i\%$ που αντιστοιχεί στο 50% φέρνουμε παράλληλη στον οριζόντιο άξονα η οποία τέμνει το πολύγωνο των σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων στο σημείο από το οποίο φέρνουμε κάθετη στον οριζόντιο άξονα που το τέμνει στο σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 25. Άρα η διάμεσος είναι 25.

Β2. Η διάμεσος χωρίζει το πλήθος των παρατηρήσεων σε δύο ίσα μέρη. Άρα $(\alpha+4)+(3\alpha-6)=(2\alpha+8)+(\alpha-2) \Leftrightarrow 4\alpha-2=3\alpha+6 \Leftrightarrow \alpha=8$, αφού η διάμεσος δ = 25.

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, 15)	10	12	20	12	20
[15, 25)	20	18	30	30	50
[25, 35)	30	24	40	54	90
[35, 45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3. Είναι: $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i\nu_i}{\nu}=\dfrac{120+360+720+240}{60}=\dfrac{1440}{60}=24$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}(x_i-\bar{x})^2\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{(10-24)^2\cdot 12+(20-24)^2\cdot 18+(30-24)^2\cdot 24+(40-24)^2\cdot 6}{60}=$$

$$=\frac{1}{60}[2352+288+864+1536]=\frac{5040}{60}=84$$. Άρα $s=\sqrt{84}\simeq 9{,}17$

Β4. Από την κλάση [35, 45) παίρνουμε το $\frac{4}{5}$ των μαθητών αφού οι παρατηρήσεις θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση. Άρα το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν 37 λεπτά είναι $\frac{4}{5}\cdot 10\% = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα ενδεχόμενα
Α: «Να μαθαίνει Γαλλικά»
Β: «Να μαθαίνει Ισπανικά»

Τότε: $P(A)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(B)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(A\cap B)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$ και

$$P(A\cup B)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x-1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Γ1. Είναι: $P(A\cup B)=1=P(\Omega)$ άρα $A\cup B=\Omega$ δηλαδή είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

Γ2. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1=\frac{3\nu+\nu+2-\nu-1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow \nu^2+1=3\nu+1\Leftrightarrow \nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0\Leftrightarrow \nu=3$, διότι $\nu\geq 3$

Γ3. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P\left((A-B)\cup(B-A)\right)$.

Επειδή τα ενδεχόμενα Α–Β και Β–Α είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$P\left((A-B)\cup(B-A)\right)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{9}{4}-\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

Γ4. Είναι: $N(A\cap B)=32$.

Επομένως σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}\Leftrightarrow \frac{4}{10}=\frac{32}{N(\Omega)}\Leftrightarrow N(\Omega)=\frac{320}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=80$ μαθητές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f\,'(x)=\frac{2\ln x\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln^2 x)}{x^2}=\frac{2\ln x-1-\ln^2 x}{x^2}=\frac{-\left(\ln^2 x-2\ln x+1\right)}{x^2}=-\frac{-\left(\ln x-1\right)^2}{x^2}<0$$

για $x\neq e$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

Δ2. Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με

$(ΟΚΛΜ)=(ΟΚ)\cdot(ΟΛ)=|x|\cdot|f(x)|=x\cdot f(x)=1+\ln^2 x$ (διότι $x>0$ και $f(x)>0$)

Άρα το εμβαδόν είναι: $E(x)=1+\ln^2 x$

Η συνάρτηση $E(x)=1+\ln^2 x$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$E'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, οπότε:

- $E'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$
- $E'(x)>0\Leftrightarrow \ln x>0\Leftrightarrow x>1$

x	0	1	$+\infty$
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$\searrow$	1 min	$\nearrow$

Η E(x) παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το E(1)=1, επομένως το ορθογώνιο ΟΚΛΜ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Δ3. Είναι $\lambda=f\,'(1)=1$. Επομένως η ευθεία είναι η $\varepsilon:\ y=-x+\beta$

Οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι $y_i=-x_i+\beta$, $i=1,2,...,10$

Η μέση τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων είναι $\bar{y}=-\bar{x}+\beta=\beta-10$ και η τυπική απόκλιση $s_y=|-1|\cdot s_x=2$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV_y\leq\dfrac{10}{100}\Leftrightarrow\dfrac{2}{|\beta-10|}\leq\dfrac{1}{10}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow|\beta-10|\geq 20\Leftrightarrow\begin{cases}\beta-10\geq 20 & ή\\ \beta-10\leq -20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta\geq 30 & ή\\ \beta\leq -10\end{cases}$$

Δ4. Είναι $A\subseteq B$ άρα $P(A)\leq P(A\cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f\left(P(A)\right)\geq f\left(P(A\cup B)\right)$ (1)

Είναι επίσης $A\cap B\subseteq A\cup B$ άρα $P(A\cap B)\leq P(A\cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f\left(P(A\cap B)\right)\geq f\left(P(A\cup B)\right)$ (2)

Αθροίζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε : $f\left(P(A)\right)+f\left(P(A\cap B)\right)\geq 2f\left(P(A\cup B)\right)$