ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα Fermat, σχολικό βιβλίο σελίδα 260

Α2. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 280

Α3. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $|z-3i|+|\bar z+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$, επομένως οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο κέντρου K(0, 3) και ακτίνας ρ=1.

Β2. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε:

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z-3i})=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\bar z+3i)=1 \Leftrightarrow \bar z+3i=\frac{1}{z-3i} \qquad (1)$$

αφού z≠3i

Β3. Είναι: $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\overset{(1)}{=}z-3i+\bar z+3i=z+\bar z=2\mathrm{Re}(z)$. Άρα $w\in\mathbb{R}$

Επίσης έχουμε: $|w|=|z-3i+\bar z+3i|=|z-3i+\overline{z-3i}| \le |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2$

Συνεπώς: $|w|\le 2 \Leftrightarrow -2\le w\le 2$

Β4. $|z-w|\overset{w=z+\bar z}{=\!=}|z-z-\bar z|=|-\bar z|=|z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε:

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x-f'(x)-xf''(x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(e^x-1\right)f'(x)+\left(e^x-x\right)f''(x)=e^x \Leftrightarrow \left[\left(e^x-x\right)f'(x)\right]'=(e^x)'$$

Οπότε: $\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x+c_1$ (1) Για $x=0$ έχουμε: $f'(0)=1+c_1 \overset{f'(0)=0}{\Leftrightarrow} c_1=-1$

Τελικά: $\left(e^x-x\right)f'(x)=e^x-1$ (2)

Έστω η συνάρτηση $g(x)=e^x-x$, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1$. Από τον διπλανό πίνακα βλέπουμε ότι η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x=0$.
Άρα: $g(x)\ge g(0) \Leftrightarrow g(x)\ge 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	1 min	↗

Συνεπώς αφού $e^x - x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η (2) γίνεται: $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

Τότε έχουμε: $f'(x) = \dfrac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \Rightarrow f'(x) = \left[\ln\left(e^x - x\right)\right]'$ Άρα: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right) + c_2$

Για $x = 0$ έχουμε: $f(0) = c_2 \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$ Τελικά: $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων με: $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ • $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, αφού $e^x - x \geq 1$

Οπότε από το διπλανό πίνακα έχουμε:
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$
και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
Παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0 min	↗	

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{2e^x - xe^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - xe^x - 1 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^x - xe^x - 1$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = 2e^x - e^x - xe^x = e^x - xe^x = (1 - x)e^x$

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ • $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Άρα έχουμε τον εξής πίνακα μονοτονίας:
Η h παρουσιάζει μέγιστο για $x = 1$ το $h(1) = e - 1$

Επίσης $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left[(2 - x)e^x - 1\right] = -1$

και $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[(2 - x)e^x - 1\right] = -\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	-1	↗	e-1 max	↘	$-\infty$

- Αν $x \in (-\infty, 1]$ τότε $h\left((-\infty, 1]\right) = (-1, e - 1]$ και επειδή $0 \in (-1, e - 1]$ και h γν. αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_1 στο $(-\infty, 1]$
- Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε $h\left((1, +\infty)\right) = (-\infty, e - 1)$ και επειδή $0 \in (-\infty, e - 1)$ και h γν. φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια ακριβώς ρίζα x_2 στο $(1, +\infty)$

Για $x < x_1$ επειδή h γν. αύξουσα είναι $h(x) < h(x_1) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Για $x_1 < x < 1$ επειδή h γν. αύξουσα είναι $h(x) > h(x_1) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$

Για $1 < x < x_2$ επειδή h γν. φθίνουσα είναι $h(x) > h(x_2) \Leftrightarrow h(x) > 0 \Leftrightarrow f''(x) > 0$

Για $x > x_2$ επειδή h γν. φθίνουσα είναι $h(x) < h(x_2) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Έτσι η f παρουσιάζει 2 ακριβώς σημεία καμπής στις θέσεις $x = x_1$ και $x = x_2$

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$		∩			∪			∩	

Γ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\text{συν}x$ με $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

- Η φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
- $\varphi(0)=-1$ και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

  Είναι f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$

  Επομένως $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $\varphi(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Επίσης η φ είναι παραγωγίσιμη στο IR με $\varphi'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\text{ημ}x=f'(x)+\text{ημ}x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ διότι $f'(x)>0$ για $x>0$

Συνεπώς η φ είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ (1)

Θέτοντας $u=x+t\Leftrightarrow t=u-x$, έχουμε $du=(x+t)'dt\Leftrightarrow du=dt$ και για $t=0\Rightarrow u=x$, για $t=-x\Rightarrow u=0$. Συνεπώς η (1) γίνεται:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du\Leftrightarrow\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\int_0^x\frac{e^{2u}e^{-2x}}{g(u)}du\Leftrightarrow\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-e^{-2x}\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow f(x)-1=\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Εργαζόμενοι ομοίως προκύπτει και $g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής στο IR, ως πηλίκο και σύνθεση συνεχών οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο IR.
Παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις λοιπόν παίρνουμε:

$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}$ (2) και $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει: $\frac{f\,'(x)}{g'(x)}=\frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow f\,'(x)g(x)=f(x)g'(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\,'(x)g(x)-f(x)g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{f\,'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0$ για κάθε $x\in IR$.

Συνεπώς είναι: $\frac{f(x)}{g(x)}=c$. Για $x=0$ έχουμε: $\frac{f(0)}{g(0)}=c \Leftrightarrow c=1$.

Τελικά $\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in IR$.

Δ2. Η σχέση (2) γράφεται: $f\,'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} f\,'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f\,'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f\,'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$. Άρα ισχύει $f^2(x)=e^{2x}+c$

Για $x=0$ έχουμε: $f^2(0)=1+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$, άρα $f^2(x)=e^{2x} \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} f(x)=e^x$, για κάθε $x\in IR$.

Δ3. Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ Θέτοντας $u=\frac{1}{x}$, όταν $x\to 0^- \Rightarrow u\to -\infty$ και

γίνεται: $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{ue^u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{e^{-u}}{u}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(\text{De 'l Hospital})=\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{\left(e^{-u}\right)'}{(u)'}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(-e^{-u}\right)=-\infty$

Δ4. Για $x=1$ έχουμε $F(1)=0$ και επειδή $F\,'(x)=f(x^2)>0$ για κάθε $x\in IR$ η F είναι γνησίως αύξουσα στο IR. Για κάθε $x\le 1 \overset{F\uparrow}{\Rightarrow} F(x)\le F(1) \Leftrightarrow F(x)\le 0$.

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)dt=-\int_0^1 (x)'F(x)dt=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF\,'(x)dt=-F(1)+\int_0^1 xf(x^2)dt=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dt=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e^1-e^0)=\frac{e-1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρίκος
Μαθηματικός