ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 152

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 142

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 65

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω: Α το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι άσπρη,
Κ το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι κόκκινη και
Μ το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι μαύρη.
Επειδή τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα έχουμε:

$$P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$$

Είναι γνωστό ότι $64<N(\Omega)<72\Leftrightarrow 64<4N(M)<72\Leftrightarrow 16<N(M)<18$ και αφού το N(M) είναι φυσικός, άρα N(M)=17. Συνεπώς N(Ω) = $4\cdot17=68$

Β2. Είναι: $P(A)+P(K)+P(M)=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{4}$ ή $\lambda=1$

Η τιμή $\lambda=1$ απορρίπτεται γιατί τότε P(A)=4>1 αδύνατο. Άρα: $\lambda=\frac{1}{4}$

Β3. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $N(M)=17$

Επίσης, για $\lambda=\frac{1}{4}$ έχουμε: $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(A)=\frac{1}{4}68\Leftrightarrow N(A)=17$

$$P(K)=-5\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\Leftrightarrow P(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(K)=\frac{1}{2}68\Leftrightarrow N(K)=34$$

Άρα το κουτί έχει: 17 μαύρες, 17 άσπρες και 34 κόκκινες σφαίρες.

Β4. Επειδή, τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι ασυμβίβαστα, έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για τη μέση τιμή σε χιλιάδες ευρώ ισχύει:

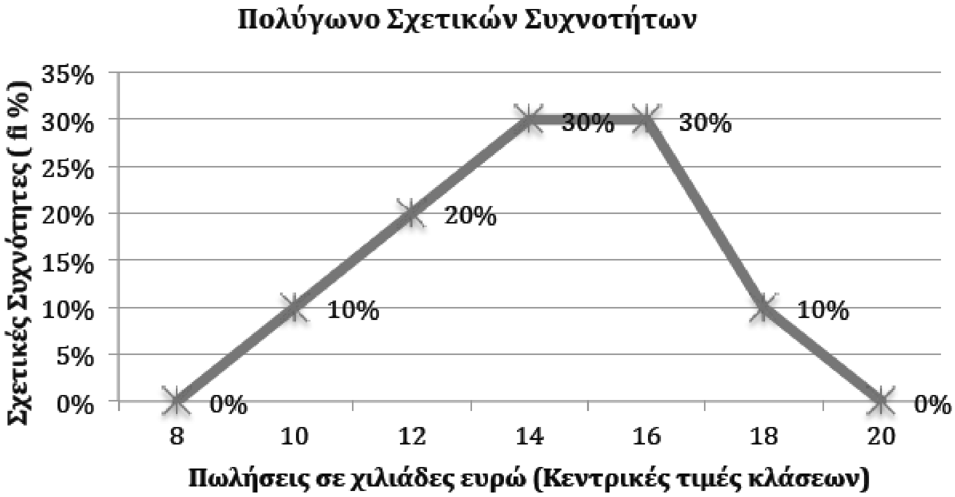
$$\bar{x}=14,2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i = 14,2 \Leftrightarrow 10\cdot 0,1+12\cdot 0,2+14\frac{y_\Delta}{100}+16\frac{y_E}{100}+18\cdot 0,1=14,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100+240+14y_\Delta+16y_E+180=1420 \Leftrightarrow 14y_\Delta+16y_E=900 \quad (1)$$

Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στον οριζόντιο άξονα, ισχύει: $y_\Delta = y_E$

Άρα η (1) γίνεται: $14y_\Delta+16y_\Delta=900 \Leftrightarrow 30y_\Delta=900 \Leftrightarrow y_\Delta=30$ και $y_E=30$

Γ2. Το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων είναι:



Γ3. Γνωρίζουμε ότι τα κέντρα των κλάσεων διαφέρουν κατά το πλάτος των κλάσεων c. Οπότε: $c = x_2 - x_1 = 2$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Σχετικές συχνότητες $f_i\%$
[9,11)	10	10
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
ΣΥΝΟΛΟ		100

Γ4. Το 30% των πωλητών έχει πραγματοποιήσει πωλήσεις που ανήκουν στο διάστημα [15,17) χιλιάδες ευρώ και το 10% των πωλητών έχει πραγματοποιήσει πωλήσεις που ανήκουν στο διάστημα [17,19) χιλιάδες ευρώ.

Άρα το ποσοστό των πωλητών που είχαν πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ και θα λάβουν το εφάπαξ έξτρα ποσό είναι 40% .

Γ5. Θεωρώντας στο πολύγωνο συχνοτήτων ως μονάδα μέτρησης του οριζόντιου άξονα τη μονάδα, το εμβαδό που περικλείεται από το πολύγωνο και τον οριζόντιο άξονα, ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος. Άρα, η εταιρία έχει 80 πωλητές και κατά συνέπεια το επιπλέον εφάπαξ ποσό δικαιούνται: $v_4 + v_S = v \cdot (f_4 + f_S) = 80 \cdot 0{,}4 = 32$ πωλητές

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}$ με $D_f = \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}\left[\frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{3}x\left(2x - \frac{11}{10}\right)\right] =$$

$$= e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{30}x + \frac{2}{15} + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{30}x\right) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}\left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = \frac{2}{5}$$

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$

Δ2. Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \le P(B)$, οπότε $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Επίσης επειδή $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$. Έχουμε λοιπόν:

- $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$
- $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

Δ3. α) $f(x)=h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)} \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{11x^2}{30}+\frac{2x}{15}=\frac{3x^3}{10}-\frac{x^2}{5}-\frac{x}{15} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3}{3}-\frac{3x^3}{10}-\frac{11x^2}{30}+\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{15}+\frac{x}{15}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{30}x^3-\frac{5}{30}x^2+\frac{3}{15}x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30\frac{1}{30}x^3-30\frac{5}{30}x^2+30\frac{3}{15}x=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+6x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=3$$

β) Για $x_1=0 \Rightarrow v_1=0+1=3$, $x_2=2 \Rightarrow v_2=4+1=5$, $x_3=3 \Rightarrow v_3=6+1=7$

οπότε $\overline{x}=\dfrac{v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3}{v_1+v_2+v_3}=\dfrac{0+10+21}{13}=\dfrac{31}{13}$