ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 304

Α2. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 279

Α3. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Α4. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι: $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$ με $\Delta=-4<0$ και ρίζες

$$z_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}=1\pm i$$, δηλαδή $z_1=1-i$ και $z_2=1+i$

Β2. $$z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=(1-i)^{2010}+\left(i\,(1-i)\right)^{2010}=(1-i)^{2010}+i^{2010}(1-i)^{2010}=$$

$$=(1-i)^{2010}+i^{4\cdot 502+2}(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}+\left(i^4\right)^{502}i^2(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}-(1-i)^{2010}=0$$

Β3. $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|1-i-1-i| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|-2i| \Leftrightarrow |w-4+3i|=2$, επομένως οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο κέντρου K(4,–3) και ακτίνας ρ=2.

Β4. Είναι: $|w-4+3i|=2 \Leftrightarrow |w+(-4+3i)|=2$, οπότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big|\,|w|-|-4+3i|\,\big| \le |w+(-4+3i)| \Leftrightarrow \big|\,|w|-\sqrt{16+9}\,\big| \le 2 \Leftrightarrow \big|\,|w|-5\,\big| \le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \le |w|-5 \le 2 \Leftrightarrow 3 \le |w| \le 7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f\,'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2+2x}{x^2+1}=2\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}>0$, για κάθε $x\in$ IR αφού $x^2+x+1>0$ ($\Delta=-3<0$). Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Γ2. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR, είναι και 1–1.

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow 2x^2-6x+4=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2(3x-2)=\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+\ln\left(x^4+1\right)=2\left(3x-2\right)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]\Leftrightarrow f\left(x^2\right)=f\left(3x-2\right)\overset{f:\ 1-1}{\Leftrightarrow} x^2=3x-2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ με Δ=1 και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$, δηλαδή $x_1=1$ και $x_2=2$

Γ3. Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο IR με

$$f\,''(x)=\left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=2\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Άρα:

- $f\,''(x)=0\Leftrightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm1$
- $f\,''(x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-1,1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Συνεπώς η f έχει σημεία καμπής στα σημεία $A(-1,-2+\ln2)$ και $B(1,\ 2+\ln2)$

- Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι:

  $y-f(-1)=f\,'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y+2-\ln2=1\cdot\left(x+1\right)\Leftrightarrow y=x-1+\ln2$

- Η εφαπτομένη της C_f στο Β είναι:

  $y-f(1)=f\,'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2-\ln2=3\left(x-1\right)\Leftrightarrow y=3x-1+\ln2$

Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases}y=x-1+\ln2\\ y=3x-1+\ln2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1+\ln2\\ x-1+\ln2=3x-1+\ln2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-1+\ln2\\ x=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-1+\ln2\\ x=0\end{cases}$$

βλέπομε ότι τέμνονται στο σημείο $\Gamma(0,-1+\ln2)\in y'y$

Γ4. $I=\int_{-1}^{1}x\,f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln\left(x^2+1\right)\right)dx=\int_{-1}^{1}2x^2\,dx+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2\,dx+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx=\frac{4}{3}+\int_{-1}^{1}x\ln\left(x^2+1\right)dx$$

Θέτουμε $u=x^2+1$, οπότε $du=2xdx\Leftrightarrow xdx=\dfrac{du}{2}$ και για $x=-1\Rightarrow u=2$ και για $x=1\Rightarrow u=2$. Συνεπώς: $I=\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}\int_{2}^{2}\ln u\,du=\dfrac{4}{3}+0=\dfrac{4}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο IR άρα και η $\dfrac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο IR και επειδή $0,x\in$ IR επομένως η $\displaystyle\int_0^x\frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR.

Τέλος η $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f\,'(x)=1+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)-x+x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x}$

Δ2. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο IR ως άθροισμα παραγωγίσιμων με $g'(x)=2f(x)f\,'(x)-2f(x)-2xf\,'(x)=2f\,'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x)=$

$$=2\frac{f(x)}{f(x)-x}\left(f(x)-x\right)-2f(x)=2f(x)-2f(x)=0$$

Επομένως από γνωστό θεώρημα η g είναι σταθερή στο IR.

Δ3. Αφού η g είναι σταθερή έχουμε: $g(x)=c$, $c\in IR$ και $g(0)=\left(f(0)\right)^2=3^2=9$. Άρα $g(x)=9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-2xf(x)=9 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2-2xf(x)+x^2=9+x^2 \Leftrightarrow \left(f(x)-x\right)^2=x^2+9$

Η $\varphi(x)=f(x)-x$ είναι συνεχής στο IR και $\varphi(x)\neq 0$, οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR. Επειδή επιπλέον $\varphi(0)=f(0)-0=3>0$, τότε $\varphi(x)>0$ στο IR.

Επομένως: $\left(f(x)-x\right)^2=x^2+9 \Leftrightarrow f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

Δ4. Έστω $h(x)=\int_x^{x+1}f(t)\,dt=\int_x^{\alpha}f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1}f(t)\,dt=-\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt+\int_{\alpha}^{x+1}f(t)\,dt$ που είναι παραγωγίσιμη στο IR με $h'(x)=-f(x)+f(x+1)$.

Αλλά $f\,'(x)=1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0$, διότι

- αν $x\geq 0$ τότε $\sqrt{x^2+9}+x>0$ και
- αν $x<0$ τότε $\sqrt{x^2+9}>-x \overset{-x>0}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{x^2+9}\right)^2>(-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9>x^2$ που ισχύει

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Άρα για $x+1>x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x+1)>f(x) \Leftrightarrow -f(x)+f(x+1)>0 \Leftrightarrow h'(x)>0$, δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο IR, οπότε $x<x+1 \overset{h\uparrow}{\Rightarrow} h(x)<h(x+1) \Leftrightarrow \int_x^{x+1}f(t)\,dt<\int_{x+1}^{x+2}f(t)\,dt$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρίκος
Μαθηματικός