

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

B. Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 213

Γ. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ 2ο

A.α. Έστω $z = x + yi$ και $M(x, y)$ η εικόνα του. Τότε :

$$x + yi = (2\lambda + 1) + (2\lambda - 1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \text{ . Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε :}$$

$x - y = 2 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0$. Δηλαδή οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία (ε) : $x - y - 2 = 0$

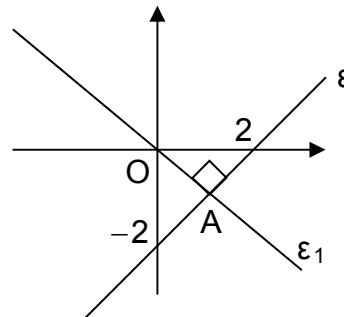
β. Από όλους τους μιγαδικούς που βρίσκονται στην παραπάνω ευθεία, αυτός με το μικρότερο μέτρο είναι αυτός που είναι πιο κοντά στην αρχή των αξόνων. Έστω ε_1 η κάθετη ευθεία στην ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Οι συντεταγμένες του σημείου A είναι η εικόνα του ζητούμενου μιγαδικού z_0 .

$$\text{Αφού } \varepsilon \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot 1 = -1 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = -1$$

Άρα η ε_1 έχει εξίσωση : $y = -x$.

Οι συντεταγμένες του A προκύπτουν από τη λύση του συστήματος :

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ . Άρα } A(1, -1) \text{ και } z_0 = 1 - i$$



B. Έστω $w = x + yi$. Τότε έχουμε :

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \\ -y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + x - 12 = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 49, & x_1 = 3, & x_2 = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

ΘΕΜΑ 3ο

- A.** Είναι $f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 1$, οπότε : $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$, $x > -1$
Επομένως η f παρουσιάζει στη θέση $x=0$ (ολικό άρα και τοπικό) ελάχιστο το $f(0)=1$. Ακόμη η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει $f'(0)=0$. Όμως $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$, άρα :
 $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.
- B.α.** Για $\alpha=e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.
Άρα η f είναι κυρτή.
- β.** Αφού f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.
Έτσι : • $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ άρα f γν. φθίνουσα στο $(-1, 0]$
• $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα f γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- γ.** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα : $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1) = 0$.
Έστω λοιπόν η συνάρτηση $g(x) = (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)$, $x \in [1, 2]$
• Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική και
• $g(1) = -(f(\beta)-1) = 1-f(\beta) = f(0)-f(\beta) < 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f
 $g(2) = f(\gamma)-1 = f(\gamma)-f(0) > 0$, διότι $f(0)$ ολικό ελάχιστο της f
Άρα $g(1) \cdot g(2) < 0$
Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ (και συνεπώς η δοσμένη) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$.

ΘΕΜΑ 4ο

- α.** Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$.
Επομένως η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ άρα και συνεχής. Η συνάρτηση $\int_0^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$. Άρα η $G(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως διαφορά συνεχών.
Εξετάζουμε τη συνέχεια της G στο σημείο $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t) dt + 3 \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x} - 0 + 3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x t f(t) dt \right)'}{x'} + 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) + 3 = 0 \cdot f(0) + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad G(0) &= 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = \\
 &= 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} = 6 \frac{1}{2} = 3
 \end{aligned}$$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 3$. Άρα η G είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Τελικά η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$

β. Στο $(0, 2)$ η H είναι παραγωγίσιμη (αφού f συνεχής) με $H'(x) = xf(x)$ και η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη με $(x)' = 1$. Άρα η $\frac{H(x)}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων με :

$$\left(\frac{H(x)}{x} \right)' = \frac{H'(x)x - H(x)x'}{x^2} = \frac{xf(x)x - \int_0^x t f(t) dt}{x^2} = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2}$$

Επίσης στο $(0, 2)$ η G είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων με

$$G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} \right)' - \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x) - \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} - f(x) = -\frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

γ. Θα εφαρμόσουμε Θ. Rolle για την G στο $[0, 2]$.

- Η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ (ερώτημα α)
- Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ (ερώτημα β)
- $G(0) = 3$ (ερώτημα α) και

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 \quad (1)$$

$$\text{Αλλά : } \int_0^2 (t-2) f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 t f(t) dt - 2 \int_0^2 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow H(2) = 2 \int_0^2 f(t) dt$$

$$\text{Οπότε : } (1) \Rightarrow G(2) = \frac{2 \int_0^2 f(t) dt}{2} - \int_0^2 f(t) dt + 3 = \int_0^2 f(t) dt - \int_0^2 f(t) dt + 3 = 3$$

$$\text{Άρα : } G(0) = G(2) = 3$$

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Rolle και υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\alpha \in (0, 2) \text{ τέτοιο ώστε } G'(\alpha) = 0 \Rightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$$

δ. Θα εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. για την G στο $[0, \alpha]$.

- Η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$ (ερώτημα α)
- Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ (ερώτημα β)

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. και υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (0, \alpha) \text{ τέτοιο ώστε } G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t) dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{H(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\int_0^\xi t f(t) dt}{\xi^2} = \frac{\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \int_0^\xi t f(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt$$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρικός
Μαθηματικός