ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 235

Α.2 Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 191

Β. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{2}+i\right||z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}\,|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{9}|z|=6 \Leftrightarrow 3|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$

, άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

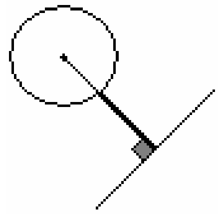
β. Έστω $w=x+yi$. Τότε: $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)| \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=|x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1+(y+1)i|=|x-3+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow 4x-4y-16=0 \Leftrightarrow x-y-4=0$

, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η ευθεία με εξίσωση (ε): $x-y-4=0$.

γ. $|w|_{min}=d(O,\varepsilon)=\dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.



δ. Αφού $d(O,\varepsilon)>\rho \Leftrightarrow 2\sqrt{2}>2$ τότε η ευθεία (ε) είναι εξωτερική του κύκλου, οπότε: $|z-w|_{min}=|d(O,\varepsilon)-\rho|=2\sqrt{2}-2$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

και $f(0)=0$ επομένως αφού $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f\,'(x)=\ln x+1$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

Η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ επομένως:

$f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$

Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ επομένως:

$f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

Τελικά $f([0,+\infty))=\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

γ. $x=e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ln x=\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x\ln x=\alpha \Leftrightarrow f(x)=\alpha,\ x>0$.

- Αν $\alpha<-\frac{1}{e}$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\alpha=-\frac{1}{e}$, τότε $f(x)=-\frac{1}{e} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$.
- Αν $-\frac{1}{e}<\alpha<0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική θετική ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ και μοναδική θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.
- Αν $\alpha\geq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική θετική ρίζα στο $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

δ. Για κάθε $x>0$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο διάστημα $[x,x+1]$ και επομένως υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$

Αλλά $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, επομένως f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε: $\xi<x+1 \Rightarrow f'(\xi)<f'(x+1) \Rightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Έστω $k=\int_0^2 f(t)dt$, τότε $f(x)=\left(10x^3+3x\right)k-45$

Άρα $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\left[\left(10x^3+3x\right)k-45\right]dx \Leftrightarrow k=k\int_0^2\left(10x^3+3x\right)dx-\int_0^2 45dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=k\left[\frac{10x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^2-45[x]_0^2 \Leftrightarrow k=k\left(\frac{160}{4}+\frac{12}{2}\right)-90 \Leftrightarrow k=46k-90 \Leftrightarrow k=2$.

Άρα $f(x)=20x^3+6x-45$.

β. Για το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ θέτω $u=-h$, οπότε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u}=\lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u}\overset{\text{ορισμός}}{=}g''(x).$$

γ. i. $$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\left(g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\right)'}{\left(h^2\right)'}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)(x+h)'-\left(2g(x)\right)'+g'(x-h)(x-h)'}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{2h}\overset{\text{από(β)}}{=}\frac{1}{2}g''(x)+\frac{1}{2}g''(x)=g''(x)$$

Άρα $g''(x)=f(x)+45 \Leftrightarrow \left(g'(x)\right)'=\left(5x^4+3x^2\right)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g'(x)=5x^4+3x^2+c$ και επειδή $g'(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g'(x)=5x^4+3x^2+1$.

Επίσης $g'(x)=\left(x^5+x^3+x\right)'$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ επομένως υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ ώστε $g(x)=x^5+x^3+x+c$ και επειδή $g(0)=1$, τότε $c=1$, δηλαδή $g(x)=x^5+x^3+x+1$.

ii. Έχουμε: $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και 1 – 1.

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρίκος
Μαθηματικός