

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 98

A.2 Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

A.3 Ορισμός - Σχολικό βιβλίο σελίδα 280

B. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι $z = \frac{2+ai}{a+2i}$ με $a \in \mathbb{R}$, οπότε $|z| = \frac{|2+ai|}{|a+2i|} = \frac{|2+ai|}{|a+2i|} = \frac{\sqrt{4+a^2}}{\sqrt{a^2+4}} = 1$.

Άρα αφού $|z|=1$, η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$.

β. Για $a=0$ έχουμε: $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{2i}{-2} = -i$ και για $a=2$ έχουμε: $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$

i. Αν A, B οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι $d(A,B) = |z_1 - z_2| = |-i - 1| = |1+i| = \sqrt{2}$

ii. Έστω $(z_1)^{2v} = (-z_2)^v \Leftrightarrow ((z_1)^2)^v = (-z_2)^v \Leftrightarrow ((-i)^2)^v = (-1)^v \Leftrightarrow (-1)^v = (-1)^v$ που ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό v , οπότε ισχύει και η αρχική.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$

Κατασκευάζοντας τον πίνακα μονοτονίας της f έχουμε:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'(x)	+	○	-	○	+
f(x)		T.μ.		T.ε.	

Συνεπώς η f έχει
 τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το
 $f(-1) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$
 και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το
 $f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$

Επίσης: $f''(x) = 6x$

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Κατασκευάζοντας τον πίνακα κυρτότητας της f έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		σ.κ.	

Συνεπώς η f έχει σημείο καμπής στο $x_3=0$, το $f(0)=-2\eta\mu^2\theta$

- β. i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ προκύπτει ότι: $f((-\infty, -1]) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Το $0 \in f((-\infty, -1])$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, -1]$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό η ρίζα είναι μοναδική.
- ii. Επειδή $f(-1)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, $f(1)=-2(1+\eta\mu^2\theta) < 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ προκύπτει ότι: $f([-1, 1]) = [-2(1+\eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$. Το $0 \in f([-1, 1])$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $[-1, 1]$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό η ρίζα είναι μοναδική.
- iii. Επειδή $f(1)=-2(1+\eta\mu^2\theta) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ προκύπτει ότι: $f([1, +\infty)) = [-2(1+\eta\mu^2\theta), +\infty)$. Το $0 \in f([1, +\infty))$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο $[1, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό η ρίζα είναι μοναδική.
- Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

γ. Έχουμε: $A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2(1+\eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

Αν (ε) είναι η ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ τότε:

- $A \in (\varepsilon)$ αφού $2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2(1 - \eta\mu^2\theta) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta$ που ισχύει
- $B \in (\varepsilon)$ αφού $-2(1+\eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow -2(1+\eta\mu^2\theta) = -2(1+\eta\mu^2\theta)$ που ισχύει
- $\Gamma \in (\varepsilon)$ αφού $-2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta$ που ισχύει

δ. Έστω $g(x) = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ και $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$. Τότε έχουμε:

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 1$$

$$f(x) - g(x) > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) > 0,$$

οπότε όπως φαίνεται και από το διπλανό πίνακα έχουμε:

$$E = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx =$$

$$= \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx =$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x	-	-	0	+	+		
x^2-1	+	0	-	-	0	+	
$f(x)-g(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

A. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ για $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο $[0,1]$. Επίσης και $g(x) > 0$ στο $[0,1]$ από υπόθεση.

Άρα $F'(x) = f(x)g(x) > 0$, οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Επομένως για $x \in (0,1)$ είναι $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Leftrightarrow F(x) > 0$

B. Για κάθε $t \in [0,x]$ δηλ. $t \leq x$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει $f(t) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) - f(t) \geq 0 \Leftrightarrow g(t)[f(x) - f(t)] \geq 0$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ τότε $f(x) - f(t)$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$, οπότε και η $g(t)[f(x) - f(t)]$ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t)[f(x) - f(t)] dt &> 0 \Leftrightarrow \int_0^x (g(t)f(x) - g(t)f(t)) dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x g(t)f(x) dt - \int_0^x g(t)f(t) dt > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t) dt - \int_0^x g(t)f(t) dt > 0 \Leftrightarrow f(x)G(x) - F(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x), \quad x \in (0,1] \end{aligned}$$

Γ. Έστω $K(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ στο $(0,1]$. Ισχύει

$$K'(x) = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x)[f(x)G(x) - F(x)]}{G^2(x)} > 0$$

επειδή ο αριθμητής, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, είναι θετικός.

Άρα $K'(x) > 0$ οπότε $K(x) \uparrow$ στο $(0,1]$, και για $x \leq 1 \Leftrightarrow K(x) \leq K(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$

Δ. Το ζητούμενο όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right) \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{x^5} \quad \text{μορφή } \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right)'}{\left(\int_0^x g(t) dt \right)'} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)'}{(x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)g(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4 \cdot 2x}{5x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \quad \begin{matrix} \text{Θέτουμε } u=x^4 \\ x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+ \end{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{5} \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu u}{u} = f(0) \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρικός
Μαθηματικός