

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

A.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

B. α. Λ β. Σ γ. Σ δ. Λ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[2, +\infty)$ με $f'(x) = 2(x-2) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ και συνεπώς 1-1.

β. Αφού η f είναι 1-1 στο $[2, +\infty)$ είναι και αντιστρέψιμη. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = 2 + (x-2)^2 \Leftrightarrow y-2 = (x-2)^2 \stackrel{y \geq 2}{\Leftrightarrow} x-2 = \pm \sqrt{y-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{y-2} \\ x = 2 - \sqrt{y-2} \text{ απορ. αφού } x \geq 2 \end{cases}$$

Αλλά το $x = 2 - \sqrt{y-2}$ απορρίπτεται διότι $x \geq 2$.

Τελικά λοιπόν: $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2}$ με $x \geq 2$

γ. i. Τα σημεία τομής της C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y=x$. Οπότε:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = x \Leftrightarrow (x-2)^2 - (x-2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}. \text{ Άρα τα σημεία τομής της } C_f \text{ και } C_{f^{-1}} \text{ με την ευθεία } y=x \text{ είναι } A(2,2) \text{ και } B(3,3).$$

ii. Επειδή η C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ το ζητούμενο

εμβαδό είναι: $E = 2 \int_2^3 |f(x) - x| dx$. Άρα:

$$\bullet f(x) - x = 0 \Leftrightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$$

$$\bullet f(x) - x > 0 \Leftrightarrow 2 + x^2 - 4x + 4 - x > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ή } x > 3$$

Άρα $f(x) - x \leq 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$ και η $f(x) - x$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$.

$$\text{Συνεπώς: } E = 2 \int_2^3 |f(x) - x| dx = -2 \int_2^3 (f(x) - x) dx = -2 \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx =$$

$$= -2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_2^3 = \left[-\frac{2x^3}{3} + 5x^2 - 12x \right]_2^3 = -18 + 45 - 36 + \frac{16}{3} - 20 + 24 =$$

$$= -5 + \frac{16}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. i. Έχουμε: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3$ (1). Άρα έστω ότι:

$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_2| &= |z_3 - z_1| \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} |-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow |z_3 + 2z_2|^2 = |z_2 + 2z_3|^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (z_3 + 2z_2)(\overline{z_3} + 2\overline{z_2}) = (z_2 + 2z_3)(\overline{z_2} + 2\overline{z_3}) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow z_3\overline{z_3} + 2\overline{z_2}z_3 + 2z_2\overline{z_3} + 4z_2\overline{z_2} = z_2\overline{z_2} + 2\overline{z_2}z_3 + 2z_2\overline{z_3} + 4z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 3z_2\overline{z_2} = 3z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow |z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ που ισχύει}
 \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$. Άρα: $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

ii. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε: $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |-z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \leq 1 + 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow |z_1 - z_2| \leq 2 \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leq 4. \text{ Επίσης:} \\
 &|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \leq 4 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \leq 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 2 - (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \leq 4 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow -2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq 2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \geq -1
 \end{aligned}$$

β. Έστω M_1, M_2, M_3 οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα. Επειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ άρα τα M_1, M_2, M_3 κινούνται στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης από τη σχέση $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ ισχύει $(M_2M_1) = (M_1M_3) = (M_3M_2)$ δηλαδή το $M_1M_2M_3$ είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου και λόγω των $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, είναι $(OM_1) = (OM_2) = (OM_3) = 1$, άρα το $M_1M_2M_3$ είναι εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Πρέπει $x > 0$ και $x \neq 1$. Άρα $A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A_f ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x}\right) < 0, x \in (0, 1) \cup (1, +\infty). \text{ Άρα } f \downarrow$$

$$\text{Επίσης: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty \text{ (επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty \text{ (επειδή } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, x-1 > 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty \text{ (επειδή } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0, x-1 < 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty \text{ (επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = 1)$$

Άρα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A) = \mathbb{R}$.

- β.** Επειδή $f((0,1)) = \mathbb{R}$ άρα $0 \in f((0,1))$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ και επειδή $f \downarrow$ στο $(0,1)$ η ρίζα είναι μοναδική.
 Επειδή $f((1,+\infty)) = \mathbb{R}$ άρα $0 \in f((1,+\infty))$, δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,+\infty)$ και επειδή $f \downarrow$ στο $(1,+\infty)$ η ρίζα είναι μοναδική.
 Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

- γ.** Είναι: $g'(x) = \frac{1}{x}$ και $h'(x) = e^x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ είναι:

$$y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ είναι:

$$y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Leftrightarrow y = e^\beta x - e^\beta \beta + e^\beta$$

Οι δύο εφαπτομένες ταυτίζονται αν και μόνο αν:
$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ -1 + \ln \alpha = -e^\beta \beta + e^\beta \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln \alpha^{-1} = \ln e^\beta \\ -1 + \ln \alpha = -\frac{1}{\alpha} \beta + \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln \alpha \\ -\alpha + \alpha \ln \alpha = -\beta + 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\alpha + \alpha \ln \alpha = \ln \alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - \ln \alpha = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha + 1 - (\alpha - 1) \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$$

- δ.** Στο προηγούμενο ερώτημα έχειδειχθεί ότι οι εφαπτομένες των C_g , C_h ταυτίζονται σε εκείνα τα σημεία στα οποία οι τετμημένες είναι ρίζες της $f(x)=0$.
 Γνωρίζοντας δε ότι η $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, άρα και οι C_g , C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρικός
Μαθηματικός