

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σελ. 335

B.1. Θεωρία σελ. 225

B.2. α. Λάθος (π.χ. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$) **β.** Λάθος (π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$) **γ.** Σωστό
δ. Σωστό (Αν θεωρήσουμε ότι η f' είναι συνεχής, αλλιώς λάθος)
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z = (i^3 + i^8 + i^{13} + i^{18})z =$
 $= (-i + i^{2 \cdot 4 + 0} + i^{3 \cdot 4 + 1} + i^{4 \cdot 4 + 2})z = (-i + i^0 + i^1 + i^2)z = (-i + 1 + i - 1)z = 0$

β. $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$f(13) = i^{13} \cdot z = i \cdot z = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} \right) \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \left[\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + i\sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

γ. $|z| = 2$, $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$

$$f(13) = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + i\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \right] = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6} \right) =$$

$$= 2 \left[\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i\sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \right) = -\sqrt{3} + i$$

Έστω $O(0,0)$, $B(1,\sqrt{3})$, $\Gamma(-\sqrt{3},1)$ τότε:

$$|OB| = 2, \quad |OG| = 2 \quad \text{και} \quad |BG| = \sqrt{((1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}-1)^2)} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο $O\hat{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο διότι:

$$|OB|^2 + |OG|^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = |BG|^2 \quad \text{άρα} \quad E_{O\hat{B}\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ τ.μ.}$$

2^{ος} τρόπος για τον υπολογισμό του εμβαδού

$$(O\hat{B}\Gamma) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{OB} & \overrightarrow{OG} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1+3| = 2 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$ τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$, δηλαδή $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ και επειδή η $f \circ g$ είναι 1-1 θα είναι $x_1 = x_2$, οπότε η g είναι 1-1.

β. Έχουμε : $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ και επειδή η g είναι 1-1 (από το α ερώτημα) η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την $f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Leftrightarrow x^3-x=2x-1 \Leftrightarrow x^3-3x+1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=x^3-3x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε : $F'(x)=3x^2-3$. Τα πρόσημα της F και η μονοτονία της φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
F'(x)	+	0	-	0	+
F(x)					

- Η F είναι συνεχής στο $[-2, -1]$ ως πολυωνυμική
 $F(-2)=-1$, $F(-1)=3$, οπότε $F(-2) \cdot F(-1) < 0$
 Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (-2, -1)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_1)=0$, δηλαδή η εξίσωση $F(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, -1)$ και επειδή F γνησίως αύξουσα στο $(-2, -1)$ η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_1 < 0$.
- Η F είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική
 $F(0)=1$, $F(1)=-1$, οπότε $F(0) \cdot F(1) < 0$
 Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_2)=0$, δηλαδή η εξίσωση $F(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$ και επειδή F γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_2 > 0$.
- Η F είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική
 $F(1)=-1$, $F(2)=3$, οπότε $F(1) \cdot F(2) < 0$
 Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_3 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $F(\rho_3)=0$, δηλαδή η εξίσωση $F(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1, 2)$ και επειδή F γνησίως αύξουσα στο $(1, 2)$ η ρίζα είναι μοναδική με $\rho_3 > 0$.

Επειδή η εξίσωση $F(x)=0$ είναι τρίτου βαθμού οι παραπάνω ρίζες είναι και οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης, δύο θετικές και μία αρνητική.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε : $h(x)-g(x) > 0$ και συνεπώς (Θεώρημα 3 σελ. 332) είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (h(x)-g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx.$$

β. i) Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ έχουμε :

$$f'(x) + e^{-f(x)} f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$$

ii) Είναι $f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0$, οπότε :

$$f''(x) = -\frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} = -\frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f στο $[0, x]$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη.

Η f στο $(0, x)$ είναι συνεχής.

Άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \xi \in (0, x) \Leftrightarrow 0 < \xi < x \overset{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \overset{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{x > 0}{\Leftrightarrow} x \cdot f'(0) < f(x) < x \cdot f'(x) \overset{f'(0) = \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$$

iii) Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $f(x) > \frac{x}{2} \geq 0$, για $x \geq 0$,

οπότε το εμβαδόν του χωρίου είναι : $E = \int_0^1 f(x) dx$

Από το προηγούμενο ερώτημα για $x \geq 0$, έχουμε :

$$\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x) \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E < f(1) - E$$

$$\text{Άρα } E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} f(1)$$

$$\text{Τελικά λοιπόν : } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρικός
Μαθηματικός