ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.
Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ **β.** $|z^2| = z^2$ **γ.** $|z| = -|\bar{z}|$ **δ.** $|z| = |\bar{z}|$ **ε.** $|i\bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\lvert z_1 z_2 \rvert$	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2 \rvert$	**β.** 2
3. $\lvert z_2 \rvert^2$	**γ.** 25
4. $-\lvert \bar{z}_1 \rvert$	**δ.** -5
5. $\lvert i z_2 \rvert$	**ε.** -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$ να δείξετε ότι $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \le 3 \\ \dfrac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο A(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών IR, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\text{i) } f(x) \neq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} (x\ f(x)\ ημ2x)$

Μονάδες 7